

## 数学 コース2 (上級コース)

I

問1 方程式

$$(x-1)^2 = |3x-5| \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1) 方程式 ① の解のうち  $x \geq \frac{5}{3}$  を満たす解は  $x = \boxed{A}$ ,  $\boxed{B}$  である。  
ただし,  $\boxed{A} < \boxed{B}$  とする。

- (2) 方程式 ① の解は全部で  $\boxed{C}$  個ある。その解のうちで最小のものを  $\alpha$  とすると,  
 $m-1 < \alpha \leq m$  を満たす整数  $m$  は  $\boxed{DE}$  である。

問 2 実数  $x, y$  に関する次の 3 つの条件 (a), (b), (c) を考える。

- (a)  $x + y = 5, xy = 3$  を満たす
- (b)  $x + y = 5, x^2 + y^2 = 19$  を満たす
- (c)  $x^2 + y^2 = 19, xy = 3$  を満たす

(1) 等式  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - \boxed{\text{F}} xy$  を用いると

条件 (b) のとき  $xy = \boxed{\text{G}}$

条件 (c) のとき  $x + y = \boxed{\text{H}}$  または  $x + y = \boxed{\text{IJ}}$

が得られる。

(2) 次の  $\boxed{\text{K}} \sim \boxed{\text{M}}$  には、下の ① ~ ③ のうちから適するものを一つずつ選びなさい。

- (i) (a) は (b) であるための  $\boxed{\text{K}}$ 。
- (ii) (b) は (c) であるための  $\boxed{\text{L}}$ 。
- (iii) (c) は (a) であるための  $\boxed{\text{M}}$ 。

- ① 必要十分条件である
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要条件であるが、十分条件ではない
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

## II

$xy$  平面上に 2 直線

$$x = 1, y = -1$$

および点  $A(0, 3)$  が与えられている。

いま、直線  $y = 1$  上に点  $P$  を、直線  $y = -1$  上に点  $Q$  をとり

$$\angle PAQ = 90^\circ$$

であるとする。2 点  $P, Q$  がこれらの条件を満たして動くとき、線分  $PQ$  の長さの最小値を求めよう。

まず、 $P$  の座標を  $(\alpha, 1)$ 、 $Q$  の座標を  $(\beta, -1)$  とする。このとき、 $\angle PAQ = 90^\circ$  を満たすことは、 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  で、

$$\alpha\beta = \boxed{\text{AB}}$$

となることである。よって、 $\alpha, \beta$  は異符号であるから、 $\alpha < 0 < \beta$  としよう。

このとき

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\beta - \alpha)^2 + \boxed{\text{C}} \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \boxed{\text{DE}} \\ &\geq 2|\alpha\beta| + \boxed{\text{DE}} = \boxed{\text{FG}} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$PQ \geq \boxed{\text{H}}$$

である。よって、 $PQ$  は

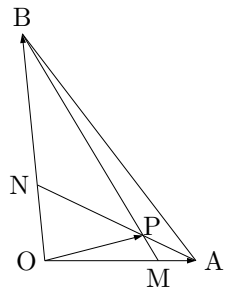
$$\alpha = \boxed{\text{IJ}} \sqrt{\boxed{\text{K}}}, \beta = \boxed{\text{L}} \sqrt{\boxed{\text{M}}}$$

のとき、最小値  $\boxed{\text{H}}$  をとる。

### III

$\triangle OAB$  を考える。

辺  $OA$  を  $3:1$  に内分する点を  $M$ ，辺  $OB$  を  $1:2$  に内分する点を  $N$  とし，線分  $AN$  と線分  $BM$  の交点を  $P$  とする。



- (1) ベクトル  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  をそれぞれ  $\vec{a}, \vec{b}$  とおくとき，ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}, \vec{b}$  で表わすことを考える。

$$AP : PN = s : (1 - s) \quad (0 < s < 1)$$

$$BP : PM = t : (1 - t) \quad (0 < t < 1)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= (\boxed{A} - s)\vec{a} + \frac{\boxed{B}}{\boxed{C}}s\vec{b} \\ &= \frac{\boxed{D}}{\boxed{E}}t\vec{a} + (\boxed{F} - t)\vec{b} \end{aligned}$$

が成り立つから

$$s = \frac{\boxed{G}}{\boxed{H}}, \quad t = \frac{\boxed{I}}{\boxed{J}}$$

である。したがって， $\overrightarrow{OP}$  は  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{K}}{\boxed{L}}\vec{a} + \frac{\boxed{M}}{\boxed{N}}\vec{b}$$

と表される。

(2) OA=6, OB=9 のとき, 線分 OP の長さ と  $\angle AOB$  の大きさ との関係を調べよう。

OP の長さを  $\ell$  とおくと、 $\ell^2$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を用いて表すと

$$\ell^2 = \frac{\boxed{\text{O}}}{\boxed{\text{PQ}}} \vec{a} \cdot \vec{b} + \boxed{\text{RS}}$$

を得る。

したがって、例えば、 $\ell = 4$  のとき

$$\cos \angle AOB = \frac{\boxed{\text{TU}}}{\boxed{\text{V}}}$$

である。

一方、 $\angle AOB$  の大きさを変えると、 $\ell$  のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{W}} < \ell < \boxed{\text{X}}$$

である。

# IV

問 1  $x$  の関数  $f(x) = \log(4x - \log x)$  がある。ここで、 $\log$  は自然対数とする。 $f''(x)$  を求めて  $f(x)$  の極値を調べよう。

ただし、 $\boxed{\text{K}}$ 、 $\boxed{\text{L}}$  には、下の ①～⑥ のうちから最も適するものを一つずつ選びなさい。

まず、 $f'(x)$ 、 $f''(x)$  を求めると

$$f'(x) = \frac{\boxed{\text{A}} - \frac{\boxed{\text{B}}}{x}}{4x - \log x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x\boxed{\text{C}}}(4x - \log x) - \left(\boxed{\text{A}} - \frac{\boxed{\text{B}}}{x}\right)^{\boxed{\text{D}}}}{(4x - \log x)^2}$$

となる。これより

$$f'\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) = \frac{\boxed{\text{GH}}}{\boxed{\text{I}} + \log \boxed{\text{J}}}$$

となる。このとき

$$f''\left(\frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}\right) \boxed{\text{K}} 0$$

であるから  $f(x)$  は、 $x = \frac{\boxed{\text{E}}}{\boxed{\text{F}}}$  で  $\boxed{\text{L}}$  となる。

また、そのときの値は  $\log(\boxed{\text{M}} + \log \boxed{\text{N}})$  である。

① =      ② >      ③ ≥      ④ <      ⑤ ≤      ⑥ 極大      ⑦ 極小

問 2 曲線  $y = 2 \cos 2x$  と曲線  $y = 4 \cos x + k$  は、 $x = a$  ( $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$ ) で共通の接線をもつとする。

- (1)  $f(x) = 2 \cos 2x$ ,  $g(x) = 4 \cos x + k$  とおく。題意より、2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  は  $x = a$  で共通の接線をもつから

$$f'(a) = g'(a), \quad f(a) = g(a)$$

である。

$f'(a) = g'(a)$  と  $0 < a \leq \frac{\pi}{2}$  から、 $a = \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}$  であり、 $f(a) = g(a)$  から  $k = -\boxed{\text{P}}$  を得る。

したがって接点の座標は  $\left(\frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}, -\boxed{\text{Q}}\right)$  であり、共通接線の方程式は

$$y = -\boxed{\text{R}} \sqrt{\boxed{\text{S}}} \left(x - \frac{\pi}{\boxed{\text{T}}}\right) - \boxed{\text{U}}$$

である。

- (2)  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲において、この2つの曲線で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよう。

2つの曲線はともに  $y$  軸に関して対称であるから、 $b = \boxed{\text{V}}$ ,  $c = \frac{\pi}{\boxed{\text{O}}}$  として

$$S = \boxed{\text{W}} \int_b^a (2 \cos 2x - 4 \cos x - k) dx$$

であり、これを計算して

$$S = \boxed{\text{X}} \pi - \boxed{\text{Y}} \sqrt{\boxed{\text{Z}}}$$

を得る。

解答

I										
問 1				問 2						
A	B	C	DE	F	G	H	IJ	K	L	M
2	3	4	-2	2	3	5	-5	0	1	2

II						
AB	C	DE	FG	H	IJK	LM
-8	4	20	36	6	-22	22

III							
ABC	DEF	GH	IJ	KLMN	OPQRS	TUV	WX
113	341	13	89	2319	42717	-18	35

IV													
問 1							問 2						
AB	CD	EF	GHIJ	K	L	MN	O	P	Q	RSTU	V	W	XYZ
41	22	14	1614	1	6	14	3	3	1	2331	0	2	233

2010.11.07 初版

okd

小春論壇 <http://www.xiaochuncnjp.com/>

mone!工作組 <http://monemone.co.de/>